

Orthogonalité et moindres carrés:

Produit Scalaire:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in \mathbb{R} \\ \langle u, v \rangle \end{aligned} \quad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}}$$

→ PROPRIÉTÉS: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (symétrique)

NORME d'un VECTEUR

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \in \mathbb{R}_+$$

$$1. \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$2. \|\vec{v}\| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

$$3. \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha \vec{v}\| = \sqrt{\alpha^2 v_1^2 + \dots + \alpha^2 v_n^2} = |\alpha| \|\vec{v}\| \in \mathbb{R}_+$$

$$\left. \begin{aligned} \langle u+v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle \alpha u, v \rangle &= \alpha \langle u, v \rangle \end{aligned} \right\} \text{Linéarité}$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad | \quad \langle u, u \rangle = 0 \text{ si } u = \vec{0}_u$$

VECTEUR UNITAIRE

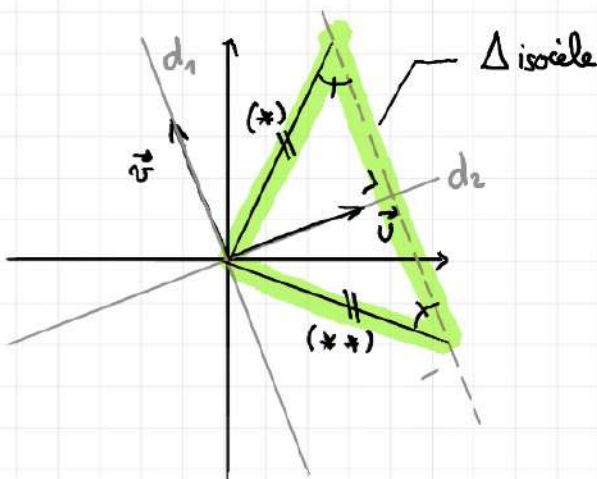
Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| > 0$, $\exists u \text{ tq}$

$$\|\vec{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| = 1$$

• Même direction que $\vec{v}$

• Même sens que $\vec{v}$

ORTHOGONALITÉ:



$$d_1 = \text{span} \{ \vec{u} \}$$

$$d_2 = \text{span} \{ \vec{v} \}$$

$$\text{tq } d_1 \perp d_2$$

$$\underbrace{\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|}_{\text{côté du triangle}} \Rightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$$

$\vec{u} \perp \vec{v}$:

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sont ORTHOGONAUX si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(\Rightarrow) \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \quad (\text{car } 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$$

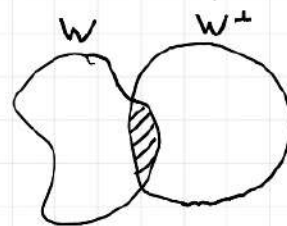
Si $\vec{v}$ est tq $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W$ $\vec{v}$ est orthogonal à W

ENSEMBLE ORTHOGONAL:

L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à W s'appelle l'orthogonal à W , noté $W^\perp$ et

$W^\perp$ est un SEV de $\mathbb{R}^n$

$$W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$$



$$W^\perp = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W \}$$

EXAMEN THEOREME

$$\text{Ker}(A) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \vec{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ (E d'antécédent)}$$

$$\text{Im}(A) = \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ (E d'image)}$$

$$\text{Lgn}(A) = \text{span} \{ \text{pgn}_1(A)^T, \dots, \text{pgn}_m(A)^T \} \subseteq \mathbb{R}^n \\ = \text{Im}(A^T)$$

$$\bullet \text{Lgn}(A)^\perp = \text{Ker}(A)$$

$$\bullet \text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$$

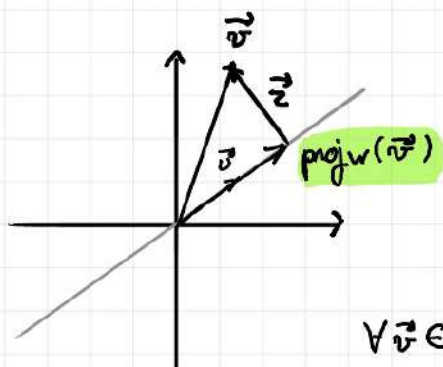
PROJECTION ORTHOGONALE:

Famille orthogonale: $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \}$ tq $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$

Base orthogonale $\rightarrow$ composé d'éléments d'une famille orthogonale

Théorème: Soient W SEV de $\mathbb{R}^n$ et $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \}$ base orthogonale de W

$$\rightarrow \vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \text{ tq } \alpha_i = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i} \quad \forall \vec{w} \in W$$



$$\vec{z} = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v}) \\ \text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

$$\text{Ker}(\text{proj}_W(\vec{v})) = W^\perp$$

$$\text{Im}(\text{proj}_W(\vec{v})) = W$$

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \text{ si } \exists \text{ base OG alors } \vec{v} = \vec{z} + \text{proj}_W(\vec{v}) = \vec{z} + \vec{w}$$

Famille orthonormale:

- Orthogonale
- Vecteurs UNITAIRES

Théorème: $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_m)$ orthonormale ssi

$$\begin{matrix} U^T U = I_m \\ m \times m \quad \quad \quad L_{m \times m} \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} U^T U \neq U U^T \\ U U^T \neq I_m \end{matrix} \right)$$

Matrice orthonormale: $\cdot \|U\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

$$\cdot U\vec{v} \cdot U\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\cdot \quad \quad \quad // = 0 \text{ ssi } \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

Thm: $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

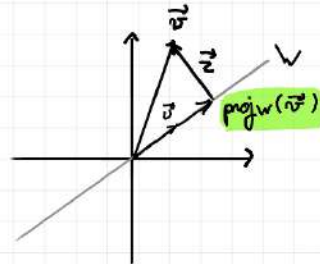
$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{z} \quad \text{avec } \vec{w} \in \underbrace{W}_{\text{SEV}}, \vec{z} \in W^\perp$$

$$\text{tg } \vec{w} = \text{proj}_W(\vec{v}) \text{ et } \vec{z} = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$$

Meilleure approximation

$$\|\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\| \quad \forall \vec{w} \in W$$

$\hookrightarrow \vec{z}$ est le @ petit qd $\vec{w} = \text{proj}_W(\vec{v})$



Décomposition QR:

1. $Q_{m \times m}$, colonnes orthonormées de $A \rightarrow$ BASE de $\text{Im}(A)$

$$\hookrightarrow \text{span}\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m\} = \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} = \text{Im}(A)$$

2. $R_{m \times m}$, Triangulaire sup: $\cdot$ Inversible

$\cdot$ Coef diag strictement positifs

Si $A_{m \times m}$, Q est OG $\Rightarrow Q^T = Q^{-1}$ Décomposition unique pour $A_{m \times m}$

Moindres carrés:

$\hookrightarrow$ Solu@ au sens des moindres $\square : \|\vec{b} - A\hat{x}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{z}\| \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n$

Méthode n°1: Résoudre $A\vec{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)} \vec{b}$

Méthode n°2: Résoudre $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$: EQUATION NORMALE

Propriétés équivalentes pour $A_{m \times n}$: $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m, A\vec{x} = \vec{b}$ UNIQUE SOL (Moindres $\square$)

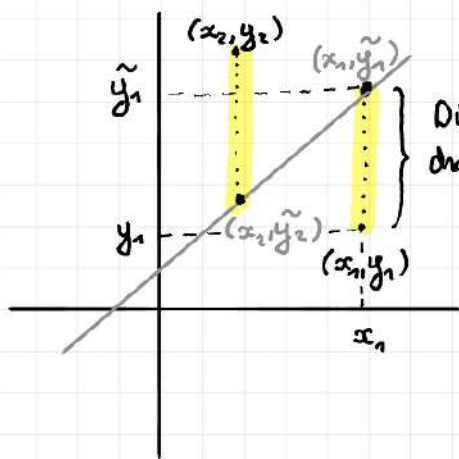
$A^T A$ est inversible

$$\text{Col}(A) \text{ Lin Indé} \Rightarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

$$\text{Si } A = QR \text{ alors } \hat{x} = R^{-1} Q^T \vec{b}$$

Droite de regression

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: Nuage de point



Distance entre la droite et le point : **RÉSIDU**

$y = mx + p \rightarrow$ droite qui minimise la distance $|y_i - \tilde{y}_i|$

Trouver $y(x)$: Résoudre $A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$ avec : $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$
 $\hookrightarrow \lambda_1 = m, \lambda_2 = R$

PROJECTION ORTHOGONALE : Trouver la projecG d'un vecteur

- Connaître le SEV en question (ex: $V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$
 $\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2$)
- Poser $A = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m)$
- Poser $\vec{b}$ le vecteur que l'on veut projeter sur V
- Résoudre $A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$

$$\hookrightarrow \text{proj}_V(\vec{b}) = \hat{x}_1 \vec{v}_1 + \dots + \hat{x}_m \vec{v}_m$$

CHANGEMENT DE BASE

Composante dans une base $\mathcal{B}$: $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ tq $v = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_m \vec{b}_m$

$$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$$

$\hookrightarrow$ Base CANONIQUE: $[v]_E = v$

APPLICATION COORDONNÉE:

$$\boxed{[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^m \\ v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{LINÉAIRE} : [\lambda v + \mu w]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}} + \mu [w]_{\mathcal{B}}$$

$\rightarrow$ BIJECTIVE

$\hookrightarrow$ SURJECTIVE: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, on cherche $\underbrace{v \in V}_{\text{tq}} [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \forall \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \exists v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m \in V \text{ tq}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ PRÉSERVE les relations d'INDÉPENDANCES et de DÉPENDANCES LINÉAIRE

Def: ISOMORPHISME

$$\text{INJECTIVE: } [v]_{\mathcal{B}} = 0$$

$\rightarrow$ Application LINÉAIRE + BIJECTIVE

$$\Leftrightarrow v = 0b_1 + \dots + 0b_m = 0_V$$

Comment prouver l'indépendance linéaire?

$\hookrightarrow$ Soit $u, v \in V$. Poser $\alpha u + \beta v = 0$

$$\bullet \text{ Calculer } [u]_E, [v]_E$$

$\bullet$ Si $([u]_E, [v]_E)$ possède 1 PIVOT/COL $\Rightarrow$ LIN. INDÉ

CHANGEMENT DE BASE : CANONIQUE $\rightarrow [v]_E = v$

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$\bullet$ On cherche $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ tq $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ une base de $\mathbb{R}^m$

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_m \vec{b}_m$$

$$\bullet \text{ ÉQUATION MATRICIELLE } \rightarrow (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$\equiv ([b_1]_E \dots [b_m]_E) [v]_{\mathcal{B}} = [v]_E$$

$$\equiv \underbrace{P_{E \leftarrow \mathcal{B}}}_{\text{MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE}} \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\text{À côté}} = [v]_E$$

MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE

$\bullet$ RÉSOLVER $([b_1]_E \dots [b_m]_E \mid [v]_E)$

CHANGEMENT DE BASE GÉNÉRALISÉ

$$B = (b_1 \dots b_m) \quad C = (c_1 \dots c_m)$$

1. On cherche $[v]_B$ avec $[v]_C$ connue

$$\bullet P_{C \leftarrow B} [v]_B = [v]_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left([b_1]_C \dots [b_m]_C \mid [v]_C \right) \text{ donne } [v]_B$$

$$[b_i]_C = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_m c_m = b_i \Rightarrow \left(c_1 \ c_2 \dots c_m \mid b_i \right) = [b_i]_C$$

$\hookrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ inconnue, ne pas confondre avec $[b_i]_E$!

2. On cherche $[v]_C$ avec $[v]_B$ connue

$$\hookrightarrow \underbrace{P_{C \leftarrow B}}_{\text{MATRICE}} \underbrace{[v]_B}_{\text{VECTEUR}} = [v]_C \quad \Rightarrow \text{Juste un PRODUIT MATRICIEL}$$

Théorème :

- $V \rightarrow EV$ et $B = (b_1, \dots, b_m)$, toute famille de V avec $\emptyset$ de m élé^s sera Lin. DEP.
- Toute autre base de V possède m élé^s.
- Toute fam d'élé^s Lin INDÉ de V peut être complétée en base

DIMENSION: Si V possède une FAMILLE GÉNÉRATRICE avec un nb d'élé^s fini, V est de dimension FINIE (sinon ∞)

$\dim(V) = \text{nb élé} = \text{de la BASE}$

Si $V = \{0_V\}$, $\dim V = 0$

$$\dim(\mathbb{R}^m) = m \quad \dim(P_m) = m+1 \quad \dim(M_{m \times m}(\mathbb{R})) = m^2$$

Soit W un SEV de $V \rightarrow \dim W \leq \dim V$

$$\left. \begin{array}{l} \dim(\text{Im}(A)) = \text{nb de col pivot} \\ \dim(\text{Ker}(A)) = \text{nb de col } \emptyset \text{ pivot} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Rang}(A) \\ \dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) \\ = \text{nb élé} = \text{de } A \end{array}$$

RANG: Nb de Col Pivot

$$\Rightarrow \text{Rang}(T) = \dim \text{Im}(T)$$

= $\dim \text{Im}(A)$ matrice associé

ESPACE LIGNE : $\text{Lgn}(A) = \text{span} \{ p_{g1}(A)^T \dots p_{gm}(A)^T \} \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^T)$$

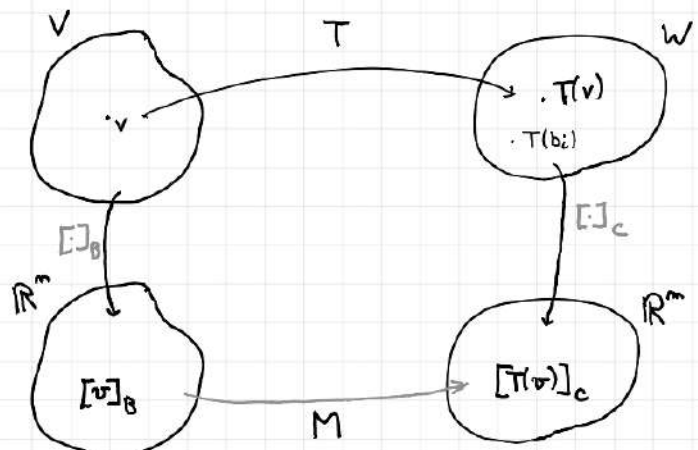
$$\Rightarrow \underbrace{\dim \text{Lgn}(A)}_{\text{Rang}(A^T)} = \underbrace{\dim \text{Im}(A)}_{\text{Rang}(A)}$$

⚠ $\text{Im}(A) \neq \text{Im}(A^T)$, $\text{Ker}(A) \neq \text{Ker}(A^T)$, $\dim \text{Ker}(A^T) \neq \dim \text{Ker}(A)$

MATRICE APPLICATION + CHANGEMENT DE BASE

$$\bullet M[v]_B = [T(v)]_C$$

$$\begin{aligned} M &= \left([T(b_1)]_C \dots [T(b_m)]_C \right) \\ &= (T \cdot P_{EB}) \cdot P_{CB} \end{aligned}$$



Donner la matrice A d'app. lin. T par rapport à la base canonique
 $\Rightarrow$ Faire l'app. lin. sur la base canon. DANS LA BASE CANONIQUE.

TROUVER $P_{B \leftarrow C}$

P_{CB} INVERSIBLE car

- B et C st des bases de $(b_1, \dots, b_m), (c_1, \dots, c_m)$ LIN. INDÉ
- $[\cdot]_B$ Isomorphisme (cf cours)
- $\rightarrow [c_i]_B$ LIN INDÉ $\forall i = 1, \dots, m$

I. Rules

$$P_{CB} = P_{CE} \cdot P_{EB} \rightarrow P_{BC} = (P_{EC})^{-1} \cdot P_{EB}$$
$$\rightarrow C^{-1} \cdot B$$

II. Développement de matrice

$$(b_1 \dots b_m \mid c_1 \dots c_m) \rightarrow (I \mid P_{BC})$$

III. Equation Matricielle

$$[b_i]_C = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_m c_m = b_i$$

$$\equiv (c_1 \dots c_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{im} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(c_1 \ c_2 \dots c_m \mid b_i) = [b_i]_C}$$

Soit $M = [T(B)]_B$ alors

$$M = B^{-1}AB$$

MATRICES SYMÉTRIQUES

Diagonalisation en base ON: Soit $A_{n \times n} = PDP^{-1}$ } $A = PDP^T$
L, Possible si P est OG $\Rightarrow P^{-1} = P^T$
L, A SYMÉTRIQUE

Théorème Spectral:

$A_{n \times n}$ symétrique $\Rightarrow A$ diagonalisable en base ON

Si un des 3 est vérifié, cela $\Rightarrow A$ sym.
 $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{admet } n \text{ valeurs propres réelles (} \emptyset \text{ forcé = distinctes)} \\ \Rightarrow \text{Pour chaque } \lambda_i \neq, \dim E_{\lambda_i} = m_i \text{ } \leftarrow \text{mult. alg. de } \lambda_i \\ \Rightarrow \text{Espaces propres st deux à deux OG} \end{array} \right.$

Prop: • $\emptyset$ SYMÉTRIQUE $\Rightarrow \emptyset$ Diagonalisable en base ON/OG
(Mais peut être diag)

• $P^{-1} = P^T$ et $PP^T = P^T P = I_n \Rightarrow$ Vect propre ON (P ON)

$\Rightarrow$ Deux vect. propre $\in$ à des espaces propres $\neq$ st OG

DECOMPOSITION SPECTRALE:

Symét. ✓
$$A = PDP^T = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)^T$$

$$A = \underbrace{\lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T}_{n \times n} + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T$$

Rang 1 $\rightarrow$ 1 pivot dans la mat.

DECOMPOSITION en VAL. SINGULIÈRE

Qd $A = PDP^{-1}$, m' existe pas,
on peut factoriser A quand $\hat{m}$:

Val. singulières: $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Val. propres
de $A^T A$

$$\text{Si } \lambda_i = \|A\vec{v}_i\|^2$$

$$\text{alors } \sigma_i = \|A\vec{v}_i\|$$

Soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ une base ON formée des VECT. PROPRES de $A^T A$
et A possède n val. singulières non-nulles

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \rightarrow \text{Val. PROPRES de } A^T A$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma_1 & \geq & \dots & \geq & \sigma_{k+1} & \geq & \dots & \geq & \sigma_n & \geq & 0 \\ & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \rightarrow \{A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_n\} \text{ est OG + base de } \text{Im}(A)$$

$\hookrightarrow \text{Rang}(A) = n$

Théorème SVD:

n : Nb de val. singulières $\equiv$ Nb val. propre de $A^T A$
NON-NULLES NON-NULLES

Soit A de rang n , il existe:

• $\Sigma_{m \times m}$ diag. par bloc

• $U_{m \times m}$ ORTHOGONALE

• $V_{m \times m}$ ORTHOGONALE

$$A = U \Sigma V^T$$

$$\rightarrow \Sigma = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{m \times m}^{\substack{n \quad m-n}}$$

$\rightarrow D_{n \times n}$ matrice diagonale
avec $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$
sur sa diag.

$$\rightarrow \text{OG} \Rightarrow \begin{array}{l} U^{-1} = U^T \\ V^{-1} = V^T \end{array}$$

⚠ SVD pas unique mais Σ oui!

$\rightarrow V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ base ON de $\mathbb{R}^m$ formée des vect PROPRES de $A^T A$.

1. TROUVER V :

- Trouver les vecteurs PROPRES de $A^T A$ ($E_i \perp E_j$ car $A^T A$ symétrique)

- NORMALISER

$$V = \left(\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \dots \frac{\vec{v}_m}{\|\vec{v}_m\|} \right)$$

⚠ On peut prendre des vect propres issus de $\lambda = 0$

2. TROUVER U :

- CALCULER $\frac{A\vec{v}_i}{\|A\vec{v}_i\|} \quad \forall \vec{v}_i$ issus de $\lambda \neq 0$!

⚠ $\begin{cases} \text{Si } n=m & : \text{Im}(A) = \mathbb{R}^m \quad \checkmark \\ \text{Si } n < m & : \text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Il faut AJOUTER des VECT.} \\ & \text{en utilisant G-S!} \end{cases}$

- Poser $\vec{u}_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ avec ex: y, z var libre

$\downarrow$
G-S

- NORMALISER

3. Trouver Σ :

$$\Sigma = U^T A V$$

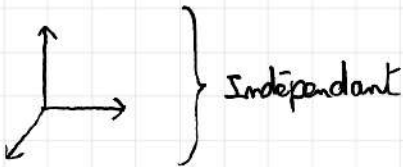
$$= \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

INDÉPENDANCE LINÉAIRE / BASE

INDÉPENDANCE LINÉAIRE :

LINÉAIREMENT INDÉPENDANT : Famille de vect $\vec{v}_i$

Ex:



$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0} \quad \text{UNIQUE} \text{ si } \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = \text{Famille LIBRE}$

$\Rightarrow \{\vec{v}_1\}$ lin indé. si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ car $\exists$ unique $\lambda_1 = 0$ pour $\lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$

$\Rightarrow \emptyset$ COLINÉAIRE $\rightarrow$ Pas sur la même droite

$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution TRIVIALE

LINÉAIREMENT DÉPENDANT : Famille de vect $\vec{v}_i$

Ex:



$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0} \quad \text{avec } \lambda_i \neq 0$$

$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = \text{Famille LIÉE}$
 $\Rightarrow$ COPLANAIRE

L) LIÉ $\Rightarrow$ Un des élé^s est comb. linéaire des autres ($\forall \text{fam} \in \mathbb{R}^m, p \geq 2$)

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ lié si v_1, v_2 st COLINÉAIRE

[METHODE COLINÉAIRE : Résoudre $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p | \vec{0})$
Solution Triviale : $\emptyset$ colinéaire autre sol : colinéaire]

Théorème :

Soit $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p\} \in \mathbb{R}^m$

$p > m$ $\rightarrow$ LINÉAIREMENT DÉPENDANT

$p \leq m$ $\rightarrow$ On ne sait pas

BASES de $\mathbb{R}^m$

Base canonique : $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$; $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$; ...

L, Soit $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$

Les coëf. de l'ec CL st les COMPOSANTES de $\vec{b}$

Base non canonique : $\rightarrow$ Vect. lin. indépendant

$\rightarrow$ Les coëf. de l'ec CL ne st pas les composantes $\vec{b}$

Définition : BASE de $\mathbb{R}^m$

• $\text{Span} \{ \vec{v}_1 \dots \vec{v}_m \} = \mathbb{R}^m$ ($p=m$) avec $\{ \vec{v}_1 \dots \vec{v}_m \}$ famille LIBRE

$\left. \begin{array}{l} p > m : \text{LIN. DÉPENDANT} \\ p < m : \text{Engendre } \emptyset \mathbb{R}^m \end{array} \right\} p=m : \text{On ne sait mais peut être base } \mathbb{R}^m$

DETERMINANT

METHODE 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Matrices des
COFACTEURS

$$\hookrightarrow \det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

METHODE 2: Matrice 3x3 UNIQUEMENT

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +aei - afh + bdi - bfg + cdh - ceg$$

$\Rightarrow \Sigma$ des diagonales

$$\hookrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{cei} & \text{afh} & \text{bdi} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{aei} & \text{bfg} & \text{cdh} \end{matrix}$$

$\ominus$ (top) $\oplus$ (bottom)

: POSITIF

 : NEGATIF

METHODE 3:

$\rightarrow$ Echelonner $A \sim \dots \sim U$ avec U une forme intermédiaire

$$\Rightarrow E_m E_{m-1} \dots E_2 E_1 A = U$$

$$\hookrightarrow \det(A) = \frac{1}{\det(E_m) \dots \det(E_1)} \cdot \det(U)$$

CAS PARTICULIERS:

Matrices diagonales,
triangulaires inf/sup



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Rmq: Si $a_{ii} = 0$, on aura $\det(A) = 0$

PROPRIÉTÉS DU DETERMINANT

Echelonner $A \rightarrow \otimes$ par des mat. élé^{aire} par la GAUCHE

$$\bullet \det(EA) = \det(E) \det(A) \Rightarrow \det(A) = \frac{\det(EA)}{\det(E)}$$

$$\text{où } \det(E) = \begin{cases} -1 & : \text{Type I} \\ \alpha & : \text{Type II} \\ 1 & : \text{Type III} \end{cases}$$

Type II $\Rightarrow \otimes \det(A)$ par $\frac{1}{\alpha}$

$$\bullet \det(AB) = \det(A) \det(B) \quad \text{MAIS: } \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$\bullet \det(A) = \det(A^T)$$

$$\bullet A \text{ est INVERSIBLE} \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\hookrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\bullet (2 \times 2) \text{ et } (3 \times 3) : |\det(A)| = \text{Aire / Volume formé par les colonnes de } A$$

$\bullet$ MULTIPLIER une LIGNE ou COLONNE par a revient à faire une opé^{at} de Type II

$$\bullet \det(2A) \neq 2 \det(A) \Rightarrow \text{Si } A_{n \times n} : \det(2A) = 2^n \det(A)$$

CALCUL MATRICIEL

THÉOREMES: A, B et C st $m \times m$

- $A + B = B + A$
- $2(\mu A) = (2\mu)A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $1 \cdot A = A$
- $2(A + B) = 2A + 2B$
- $A + 0_{m \times m} = A$
- $(2 + \mu)A = 2A + \mu A$
- $A \cdot 0 = 0_{m \times m}$

Applications $\left\{ \begin{array}{l} T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m, T_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto T_B(x), x \mapsto T_A(x) \\ \Rightarrow T_A(T_B(x)) \equiv (AB)x \end{array} \right.$

PRODUIT MATRICIEL

$A_{m \times n} B_{n \times p} = (A \vec{b}_1 \dots A \vec{b}_p)$

$\rightarrow$ Prod. Mat. ssi $\text{Col}(A) = \text{Lgn}(B)$

$\Rightarrow$

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $2(AB) = (2A)B = (2B)A$
- $A_{m \times m} = A \cdot I_m = I_m \cdot A$

MATRICE TRANSPOSÉE A^T

$\hookrightarrow$ Les LIGNES deviennent les COLONNES

L , Sens de $\otimes: G \rightarrow D$
 Δ ORDRE!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$A \qquad A^T$

THÉOREMES:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\det U^T = \det U$

SYMETRIE

$\Rightarrow A^T = A \quad a_{ij} = a_{ji}$

$\hookrightarrow$ Diagonale quelconque

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$\Delta \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ SYMETRIQUE!

ANTI-SYMETRIE

$\Rightarrow A^T = -A \quad a_{ij} = -a_{ji}$

$\hookrightarrow$ Diagonale de 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE NULLE:

SYMETRIE et ANTI-SYMETRIQUE

$\det(A^T) = (-1)^n \det(A)$

$\hookrightarrow$ Nulle qd n impaire
 $\hookrightarrow \neq 0$ qd n paire

On peut écrire TOUTE MATRICE $\hat{=}$ Σ matrice SYM + ANTI-SYM

$\hookrightarrow A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

INVERSE :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$$

Si $A \notin \text{invertible} \Rightarrow A \text{ est SINGULIÈRE}$

$$A^{-1}_{2x2} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\det(A)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Si A est INVERSIBLE : Solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ est $\underline{A^{-1}\vec{b}}$

THÉOREMES :

- A^{-1} INVERSIBLE $\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad | \quad (A^{-1})^T A^T = I_m$

MATRICE ÉLÉMENTAIRE :

Type I : Inversion Pigne

$$\hookrightarrow E_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Type II : $L_i \leftarrow \alpha L_i$

$$\hookrightarrow E_{II} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice éle=aire $\rightarrow$ INVERSIBLE

Type III : $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$

$$\hookrightarrow E_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MEGA THEOREME à savoir par ♥ : Equivalence

1. A est INVERSIBLE
2. $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une UNIQUE SOLUTION ($A^{-1}\vec{b}$)
3. $\text{Span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} = \mathbb{R}^m$
4. A possède 1 PIVOT/LIGNE (+1 PIVOT/COLONNE)
5. $\text{Col}(A)$ st LINÉAIREMENT INDÉ
6. $A\vec{x} = \vec{0}$ n'a que la SOL. TRIVIALE
7. On peut passer de A à I_n avec G-J
8. A est produit de MAT. ÉLÉMENTAIRE
9. App. Linéaire est surjective
10. injective
11. A^T est INVERSIBLE
12. $\text{Rang}(A) = m$
13. $\dim \text{Ker}(A) = 0$
14. $\det(A) \neq 0$

NOYAU : E de départ des $\vec{x}$ tq $T(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\boxed{\text{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(\vec{x}) = \vec{0}_W\} \subseteq V} \Rightarrow \text{Span}\{\text{SOLUTION HOMOGÈNE}\}$$

↳ SEV de V

↳ ESPACE d'ANTÉCÉDANT

IMAGE : E d'arrivée des $\vec{b}$ tq $T(\vec{x}) = \vec{b}$

$$\boxed{\text{Im}(T) = \left\{ \vec{b}' \in W \mid \exists \vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \vec{b}' \right\} \subseteq W} \Rightarrow \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$$

↳ SEV de W

Base du Ker : $\vec{s}' = t \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

Base de l'Image : Col pivot

↳ ESPACE d'IMAGE

APPLICATION / TRANSFORMATION

$A\vec{x}' = \vec{b}'$: A TRANSFORME $\vec{x}'$ en $\vec{b}'$ avec $\vec{x}' \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b}' \in \mathbb{R}^m$

TRANSFORMATION : Assigne à chaque vecteur de $\mathbb{R}^m$ un vect dans $\mathbb{R}^m$

$T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
/ \ / \
IE départ IE arrivé Antécédant Image $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^m$
↳ IE de toute les images

TRANSFORMATION LINÉAIRE:

CondG : $\left. \begin{array}{l} T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w}) \\ T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \end{array} \right\} \forall \vec{v}, \vec{w} \in \text{IE départ de } T$

→ $T(\vec{0}) = \vec{0}$, $T(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda T(\vec{v}) + \mu T(\vec{w})$

TRANSFORMATION MATRICIELLE:

Si $\exists A$ tq $T(\vec{x}') = A\vec{x}'$

$$A = (T(\vec{e}_1') \dots T(\vec{e}_m')) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Matricielle $\Rightarrow$ Linéaire

Linéaire $\Rightarrow$ Matricielle
Pourque $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

INJECTIVE : $\bullet \forall \vec{x}' \in \mathbb{R}^m$, MAX 1 IMAGE $\vec{b}' \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \forall \vec{x}', \vec{y}' \in \mathbb{R}^m$, si $\vec{x}' \neq \vec{y}'$ alors $T(\vec{x}') \neq T(\vec{y}')$

$\Rightarrow$ 1 PIVOT PAR COLONNE

↓

$\Rightarrow$ LINÉAIREMENT INDÉPENDANT

SURJECTIVE : $\bullet \forall \vec{x}' \in \mathbb{R}^m$, MIN 1 IMAGE $\forall \vec{b}' \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ 1 PIVOT PAR LIGNE $(\Rightarrow \text{Span} = \mathbb{R}^{\text{pgn}})$

ESPACES VECTORIELS

AXIOMES: ESPACE VECTORIEL

- $u + v \in V$
- $u + v = v + u$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $u + 0_v = u$ (0_v : Élément neutre addition)
- $\forall u \in V, \exists -u$ tq $u + (-u) = 0_v$
- $\lambda u \in V$
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\lambda(\mu u) = (\lambda \mu)u$
- $1 \cdot u = u$

$\rightarrow 0_v$ est UNIQUE

$\rightarrow (-u)$: Élément INVERSE UNIQUE

$\rightarrow 0 \cdot u = 0_v$

$\rightarrow \lambda 0_v = 0_v$

$\rightarrow (-1)u = -u$

Exemple d'EV:

$\mathbb{R}, \mathbb{P}, M_{m \times n}(\mathbb{R})$

POLYNOMES

$$\mathbb{P}_m = \{a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

SOUS ESPACE VECTORIEL

3 AXIOMES :

- $0_v \in W$
- $\forall u, v \in W : u + v \in W$
- $\forall u \in W, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda u \in W$

$$\boxed{SEV \Leftrightarrow EV}$$

SEV de $\mathbb{R}^n$: $\text{span}\{\vec{v}\}, \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \dots$ avec $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$

SEV dans V : $W = \text{span}\{u, v\} = \{w \in V \mid w = \alpha u + \beta v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
 $u, v \in V$
 $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

Famille GÉNÉRATRICE

$\{v_1, \dots, v_p\}$ est $\uparrow$ si elle engendre le $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$

INDÉPENDANCE LINÉAIRE :

$\hookrightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0_v$ n'admet que la sol. TRIVIALE

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

Si non LIN. DEP.

DÉPENDANCE LINÉAIRE :

$\hookrightarrow$ Un des élé^s de la famille est CL des autres

BASE :

BASE $\rightarrow$ LINÉAIREMENT INDÉPENDANTE

$\rightarrow$ Famille GÉNÉRATRICE de V

$$\hookrightarrow \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$$

Nombre de var. LIBRE = Nombre de vecteurs de la BASE

BASE EXTRAITE :

$$S = \{v_1, \dots, v_p\}, W = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$$

$\in V$

- Si $\exists v_i$ s'écrit $\hat{=}$ CL $\rightarrow$ EXCLURE de $\{v_1, \dots, v_p\}$

Car $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p\}$ et $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p\}$ st des

FAMILLES GÉNÉRATRICE du même ensemble !

- Si $W \neq \{0_v\}$ alors $\exists$ une famille S qui GÈNÈRE W

$\hookrightarrow \emptyset$ de base !

VECTEURS

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

$\{v_1, \dots, v_m\}$ composantes de $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$

PROPRIÉTÉ:

$$1. \vec{v} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$$

$$2. \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$$

$$3. \lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$

$$4. (\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$

Commutativité

$$5. \lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$$

$$6. 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad (1: \text{élé} = \text{neutre par la } \otimes \text{ scalaire})$$

$$7. \vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

$$8. \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad (0: \text{élé} = \text{neutre par l'addition})$$

Composition:

Sons ($\pm$)

Distributivité $\rightarrow$ Composantes

COMBINAISON LINÉAIRE:

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m) \in \mathbb{R}^m \text{ - ligne ; } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$
colonne

λ_i peut être nul

$$\boxed{\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m$$

ou EQUATION VECTORIELLE $\rightarrow (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_m | \vec{b})$

SPAN:

IE des comb. lin. de $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \rightarrow$ IE engendré par la famille vect.

$\hookrightarrow$ Permet de décrire l'"espace" de l'IE de soluc

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Ex: } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{Oxy} \neq \mathbb{R}^2$$

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} = \mathbb{R}^m \text{ si } \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \text{ Famille libre} \\ \Rightarrow \text{LIN. INDÉ.}$$

BASE $\rightarrow$ Famille de vect. linéaire = indépendant

$$\rightarrow \text{Génère } \mathbb{R}^m \Rightarrow \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} = \mathbb{R}^m$$

$$\text{Base canonique: } \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\} \rightarrow \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{e}} \text{ composante}$$

ALGÈBRE : LES BASES

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = b$$

→ Eq. LINÉAIRE

a_i : coefficient

x : Variable

b : Membre de droite

$$\Rightarrow x^m \text{ avec } m=1$$

$a_{m \times m}$: $m \rightarrow$ ligne
 $m \rightarrow$ colonne

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

→ SYSTÈME d'Eq LINÉAIRE

Possède un ENSEMBLE de SOLUTION

$$S = (s_1, \dots, s_m)$$

→ Valeurs associées aux variables pour respecter les égalités

TROIS TYPES DE SOLUTIONS

- UNIQUE soluc : $\hat{m}$ nb de variables de base que de colonne
- ∞^k soluc : $v_{\text{base}} < \text{col}$
- $\emptyset$ solution : Type $0x = b$
 $L \neq 0$

SYS. INCOMPATIBLE

OPÉRATIONS sur LIGNES

Type I : $L_i \longleftrightarrow L_j$ PERMUTATION

Type II : $L_i \longrightarrow \lambda L_i$ MULTIPLICATION

Type III : $L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_j$ ADDITION DE LIGNES

Ecriture MATRICIELLE

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_B$$

A $\rightarrow$ Matrice des COEFFICIENT

B $\rightarrow$ Matrice AUGMENTÉE

$$\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

* : pivot (non-nul)

$\hookrightarrow$ Abs. force = égal à 1

* : Nb. nées

$\uparrow$
Col pivot: Col qui contient un pivot

- $\rightarrow$ Ligne de 0, suivi unique = d'autres lignes de 0
- $\rightarrow$ Indice col pivot < Indice prochaine col pivot ($\hookrightarrow$)
- $\rightarrow$ Pivots: Seuls valeurs d'une colonne

Variable DE BASE

$\rightarrow$ Colonne pivot

Matrice composé de var. de base

$\hookrightarrow$ Uniq. sol.

Variable LIBRE

$\rightarrow$ Colonne sans pivot

Matrice composé de var. libre

$\hookrightarrow$ ∞ de solution

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

⚠ Système INCOMPATIBLE

Système HOMOGÈNE: $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} * & \dots & * & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & 0 \\ 0 & \dots & * & | & 0 \end{pmatrix}$$

Possède tj une solution TRIVIALE

$$\hookrightarrow x_1 = \dots = x_m = 0$$

VECTEURS PROPRES / VALEURS PROPRES

VECTEURS PROPRES :

- $\vec{v} \neq 0$

- Si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

VALEURS PROPRES : λ associé à $\vec{v}$

$\hookrightarrow$ Peut être NULLE

$A - \lambda I_n$ est SINGULIÈRE

Trouver des VALEURS PROPRES : $\rightarrow$ Développer $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$\rightarrow$ Trouver les racines de l'expression

Comment trouver les racines d'une expression ?

FACTORISER $p_A(\lambda)$ de $\deg \geq 3$:

$$p_A(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

$\rightarrow$ Trouver une RACINE ÉVIDENTE λ_1

$\rightarrow$ Écrire $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(a'\lambda^2 + b'\lambda + c')$

$\rightarrow$ Poser $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = (\lambda - \lambda_1)(a'\lambda^2 + b'\lambda + c')$

$$\rightarrow \begin{cases} a' = a \\ b = b' - a\lambda_1 \\ c = -c'\lambda_1 \end{cases} \quad \rightarrow \text{Égaliser les coefficients pour les retrouver}$$

$\rightarrow$ Calculer les racines du polynôme $a'\lambda^2 + b'\lambda + c'$

$$\Delta = b'^2 - 4a'c' \quad \rightarrow \quad z = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{2a'}$$

Trouver des VECTEURS PROPRES: Résoudre $(A - \lambda I_m) \vec{v} = 0$

↳ Solution non-triviale = Vect. propre

⇒ VECT PROPRE = Vect du span de l'ESPACE PROPRE

Espace propre: $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_m)$

↳ Matrice $n \times n$ possède n valeurs propres DISTINCTES

↳ $p_A(\lambda) \in \mathbb{P}_n$ possède n racines $\emptyset$ forcées distinctes

Multiplicité: Nb de fois que λ apparaît en RACINE

Trace: Σ des él^{ts} diagonaux d'une matrice

↳ $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Trouver la matrice de transformation

1. Injecter les vecteurs de la base de départ dans T .
↳ on obtient $T(b_1), T(b_2), \dots$

2. Écrire $(D | T(b_1) \ T(b_2) \ \dots)$ D : base d'arrivée

3. Echelonner $\rightarrow (I_n | \underbrace{M}_{\text{matrice de transformation}})$

:

Cas particulier : $\lambda = 0$, $\exists \vec{v}$ tq $A\vec{v} = \vec{0}$ avec $\underbrace{\vec{v} \neq \vec{0}}$
L, $\text{Ker}(A) \neq \{\vec{0}\}$ $\vec{v} = 0 \notin \text{vect propre}$

$\Rightarrow A$ est SINGULIÈRE

Si $\lambda = 0 \notin \text{valeurs propres}$ alors A est INVERSIBLE

DIAGONALISATION

• Trouver A à partir des VECT. PROPRES (et λ)

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vect propres et $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

$$A = P^{-1}AP$$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver les vecteurs propres

1. Echelonner $(A - \lambda I_m)$ avec λ choisit
2. Vect propre $\rightarrow$ variable libre
3. $\vec{v}_i = x_i \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ ($\hat{C}$ par le Ker)

• Multiplicité géométrique de A avec λ

$\rightarrow (A - \lambda I_m) \rightarrow \lambda$ choisit

$\rightarrow$ Echelonner la matrice

$\rightarrow$ Mult géométrique = COLONNE(S) VIDE(S) / nb vect qui compose span Ker $(A - \lambda I)$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice semblable :

$$B = P^{-1}AP$$

$\hookrightarrow P^{-1}$ en 1^{er}

: A est semblable à B

$\Leftrightarrow$ B est semblable à A

Propriété : Deux matrices semblables ont les MEMES VALEURS PROPRES + POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

⚠ L'inverse n'est pas vrai !

Matrice DIAGONALISABLE : Soit D diagonale,

$$D = P^{-1}AP \text{ et } A = PDP^{-1}$$

$\uparrow$

$\Leftrightarrow$ admet n vect. propre. LIN. INDÉ

$\Rightarrow$ $\exists$ une base formée des vect propre

Cas où A possède n val propre distinctes tq $n \leq m$:

L, Trouver les ESPACES PROPRES associé et compter le nb de vect LIN INDÉ.

L, Pour avoir m VECT. PROPRE LIN. INDÉ il faut que $\exists$ autant de vecteurs dans le span de E_{λ_i} qui de multiplicité.

$$\Rightarrow \dim E_{\lambda_i} = m_i$$

L mult algébrique

L, $\exists$ m vect. propres $\in$ span de E_{λ_i} quand λ est de multiplicité m

A symétrique $\Rightarrow$ DIAGONALISABLE

A antisymétrique $\Rightarrow$ diag. mais avec des valeurs propres complexes.

Théorème: Soit B la base formé des COLONNES de P ($D = P^{-1}AP$)
L, $(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$

$$D = \left([T(\vec{p}_1)]_B \cdots [T(\vec{p}_m)]_B \right)$$

Trouver la matrice de transformation

1. Injecter les vecteurs de la base de départ dans T .
L, on obtient $T(b_1), T(b_2), \dots$

2. Écrire $(B | T(b_1) \ T(b_2) \ \dots)$ B : base d'arrivée

3. Échelonner $\rightarrow (I_m | \underbrace{M}_{\text{matrice de transformation}})$

$$M = P_{BE}^{-1} A P$$

PROPRIÉTÉS de $A = P D P^{-1}$

MATRICE PAR BLOC

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \right\}$$

PRODUIT MATRICIEL $\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow 3 \times 6 \rightarrow 2 \times 3 \text{ par blocs} \\ B \rightarrow 6 \times 3 \rightarrow 3 \times 1 \text{ par blocs} \end{array} \right. \rightarrow \text{Lgn}(B) = \text{Col}(A)$

⚠ CONDITION : $m_i = m_i$ ($m = 3 \text{ col}$ et $m = 2 \text{ lgn}$ $\emptyset$ possible)

THÉORÈME :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array} \right) \Rightarrow A+B = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ \hline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{array} \right)$$

avec A_{ij}, B_{ij} à TAILLE!

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right)_{m \times m}, \quad B = \left(\begin{array}{c} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{array} \right)_{m \times p} \Rightarrow AB = \left(\begin{array}{c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \end{array} \right)_{m \times p}$$

(2x1 par blocs)

INVERSE d'une Matrice par BLOCS

↳ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Poser } A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right), A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) \\ \bullet \text{ Résoudre } AA^{-1} = I_m \text{ en sys. d'équation} \end{array} \right.$

Théorème

Si A matrice Δ par blocs tq A_{11}, A_{22} INVERSIBLE

$$\Rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \hline 0 & A_{22}^{-1} \end{array} \right)$$

Matrices TRIANGULAIRES :

SUPERIEUR

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{array} \right)$$

Par bloc $\rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right)$

INFERIEUR

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm} \end{array} \right)$$

Par bloc $\rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$

Matrice DIAGONALE

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{array} \right)$$

MATRICE SCALAIRE :

$$\lambda I_m = \left(\begin{array}{ccc} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{array} \right)$$

EQ. MATRICIELLE / SYSTÈMES

EQ. MATRICIELLE :

$$\begin{array}{c} A \vec{x} = \vec{b} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Matrice} \quad \text{vecteur} \end{array}$$

$$\begin{cases} \bullet \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = \vec{b} \\ \bullet (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_m | \vec{b}) \end{cases}$$

SOLUTION

$$\vec{s} = (s_1 \dots s_m)$$

$$\text{tq } s_1 \vec{a}_1 + \dots + s_m \vec{a}_m = \vec{b}$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^m, a_i \in \mathbb{R}^m$$

$$\vec{b} \in \mathbb{R}^m : \text{combinaison linéaire de } (a_1 \dots a_m) \vec{s}$$

THÉORÈME : PROPRIÉTÉS $A_{m \times m}$

1. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m, A\vec{x} = \vec{b}$ admet AU MOINS UNE SOLUTION
- ($\Rightarrow$) 2. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \vec{b}$ est COMB. LIN des colonnes de A.
- ($\Rightarrow$) 3. $\text{Span}\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_m\} = \mathbb{R}^m$.
- ($\Rightarrow$) 4. Chaque ligne de A possède un pivot

$$\emptyset \text{ forcé} = 1 \text{ pivot par colonne} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \end{array} \right) \text{ FONCTIONNE !}$$

SYSTÈMES HOMOGÈNE :

$$A\vec{x} = \vec{0} \rightarrow \text{Toujours COMPATIBLE } (\vec{s} = \vec{0})$$

$$\begin{cases} \text{Uniq sol : } \vec{s} = \vec{0} \\ \text{inf sol : } \vec{s} = \vec{0} \text{ et } \vec{s} = t\vec{v} \text{ (SOUVENT !)} \end{cases}$$

$$L) \text{ Matrice ER : } \vec{s} = \text{SOLUTION GÉNÉRALE} \quad \vec{s} = t \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

SYSTÈMES NON-HOMOGÈNE :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Si $\exists$ au $\emptyset$ une solution :

$$\text{IE de sol : } \boxed{\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}_t} \quad \begin{cases} - \vec{p} : \text{SOLUTION PARTICULIÈRE (pour un } \vec{b} \text{ donné)} \\ - \vec{v}_t = t\vec{v} : \text{SOLUTION GÉNÉRALE (inf sol.)} \end{cases}$$

L) Solution de $A\vec{x} = \vec{0}$ $\triangle$